Preparaduría V

1.- Sea A una matriz diagonal $n \times n$ cuyo polinomio característico es

$$(x - c_1)^{d_1} \cdot (x - c_2)^{d_2} \cdot \ldots (x - c_k)^{d_k}$$

donde los $c_1, \ldots, c_k$ son distintos dos a dos. Sea V el espacio de matrices $n \times n$ tales que $AB = BA$. Demostrar que la dimensión de V es $d_1^2 + d_2^2 + \ldots d_k^2$. Demuestre que si una matriz $C \in M_n$ conmuta con una matriz $D \in M_n$ con n autovalores distintos, entonces C es diagonalizable.

2.- a) Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$ y A la siguiente matriz 3×3 sobre $\mathbb{F}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Demuestre que el polinomio característico de A es $x^3 - ax^2 - bx - c$ y que éste es también el polinomio minimal de A.

b) Sea A la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que el polinomio característico de A, que es $x^2 (x - 1)^2$, es al mismo tiempo su polinomio minimal. Será A semejante, sobre $\mathbb{C}$, a una matriz diagonal? Compruebe que, de hecho, si dos matrices reales cuadradas son semejantes sobre $\mathbb{C}$, entonces son semejantes sobre $\mathbb{R}$.

3.- a) Hallar una matriz 3×3 cuyo polinomio minimal sea x^2.

b) Sea n un entero positivo y sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ con grado a lo sumo n. Sea $\mathfrak{D}$ el operador derivación sobre V. Cuál es el polinomio minimal de $\mathfrak{D}$?

c) Sea $\mathfrak{P}$ el operador en $\mathbb{R}^2$ que proyecta cada vector sobre el eje x, paralelamente al eje y. Observe que $\mathfrak{P}$ es lineal. Cuál es el polinomio minimal de $\mathfrak{P}$?

4.- Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdot \ldots (x - c_k)^{dk}$$

Demuestre que $c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots + c_k d_k = \operatorname{tr}(A)$.

5.- Sea V el espacio vectorial de matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Sea A una matriz $n \times n$ fija. Sea $\mathfrak{T}$ el operador lineal sobre V definido por $\mathfrak{T}(B) = AB$. Demuestre que el polinomio minimal de $\mathfrak{T}$ es el polinomio minimal de A.

6.- Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Muestre que son equivalentes:

a) $A^2 = BA$ para alguna matriz no - singular B.

b) $\operatorname{rk}\left(A^2\right) = \operatorname{rk}(A)$.

c) $\operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Ker}(A) = 0$.

d) Existen matrices no singulares $P \in M_n$, $D \in M_{\operatorname{rk}(A)}$ tales que

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

7.- Sea $\mathfrak{T}$ el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base ordenada canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por $\mathfrak{T}$ son $\mathbb{R}^2$ y el subespacio nulo.

b) Si $\mathfrak{U}$ es el operador lineal sobre $\mathbb{C}^2$ cuya matriz en la base canónica ordenada es A, compruebe que $\mathfrak{U}$ tiene un subespacio de dimensión 1 invariante.

8.- a) Sea W un subespacio invariante por $\mathfrak{T}$. Demuestre que el polinomio minimal para el operador restricción $\mathfrak{T}_W$ divide al polinomio minimal de $\mathfrak{T}$.

b) Sea c un autovalor de $\mathfrak{T}$ y sea W el espacio de vectores propios asociado a c. Cómo es el operador restricción T_W?

9.- a) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Será A semejante sobre el cuerpo de los reales a una matriz triangular? Si es así, hallar esa matriz triangular.

b) Demuestre que cada matriz tal que $A^2 = A$ es semejante a una matriz diagonal.

c) Sea $\mathfrak{T}$ un operador lineal sobre V. Si todo subespacio de V es invariante por $\mathfrak{T}$, entonces $\mathfrak{T}$ es un múltiplo escalar del operador identidad.

10.- Sea $\mathfrak{T}$ el operador de integración indefinida

$$\mathfrak{T}(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

sobre el espacio vectorial de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. Es el subespacio de polinomios invariante sobre $\mathfrak{T}$? El subespacio de funciones diferenciables? El subespacio de funciones que se anulan en $x = \frac{1}{2}$?

11.- Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$. Demuestre que si A no es semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz triangular, entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz diagonal. Responda verdadero o falso: si una matriz triangular A es semejante a una matriz diagonal, entonces A es diagonal.

12.- Sea $\mathfrak{T}$ un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ algebraicamente cerrado. Sea f un polinomio sobre $\mathbb{F}$. Demuestre que c es un autovalor de $f(\mathfrak{T})$ si, y sólo si, $c = f(\tau)$, donde τ es un autovalor de $\mathfrak{T}$.

13.- Sea $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Demuestre que existe un polinomio f a coeficientes enteros tal que $f(A) = 0$. Hallar el polinomio minimal de A, donde $A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ y los λ_i son distintos dos a dos.

14.- Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es *nilpotente* si $A^m = 0$ para algún natural $m \geq 2$. Muestre que si A es nilpotente entonces:

a) $I - A$ es inversible. Hallar la inversa.

b) Cualquier autovalor de A es 0.

c) $\mathrm{tr}(A) = 0$.

d) $A^n = 0$.

15.- a) Hallar una proyección E que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por $(1,-1)$ según el subespacio generado por $(1,2)$.

b) Si E_1 y E_2 son proyecciones sobre subespacios independientes, entonces $E_1 + E_2$ es una proyección. Verdadero o falso?

c) Si E es una proyección y f es un polinomio entonces $f(E) = aI + bE$. Hallar a y b en términos de los coeficientes de f.

d) Si E es la proyección de R según N, entonces $I - E$ es la proyección de N según R.

16.- Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. Supóngase que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son proyecciones de V tales que $E_1 + \ldots + E_k = I$. Demuestre que $E_i \circ E_j = 0$, para $i \neq j$.

17.- Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se dice *idempotente* si $A^2 = A$ y una *involución* si $A^2 = I$. Muestre que si A es una involución, entonces:

a) $\frac{1}{2}(I + A)$ y $\frac{1}{2}(I - A)$ son idempotentes y $\left[\frac{1}{2}(I + A)\right]\left[\frac{1}{2}(I - A)\right] = 0$.

b) $\operatorname{rk}(A + I) + \operatorname{rk}(A - I) = n$.

c) A tiene solamente autovalores ± 1.

d) $V = V_1 \oplus V_{-1}$, donde V_1 y V_{-1} son los autoespacios de 1 y -1 respectivamente.

e) $\operatorname{Im}(A - I) \subseteq \operatorname{Ker}(A + I)$.

f) A es semejante a $\operatorname{diag}[1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1]$.

g) Muestre que si $A^k = I$ para algún $k < n$ entonces A tiene autovalores repetidos.

18.- Sea $\mathfrak{A}$ una transformación lineal idempotente en un espacio vectorial n-dimensional. Muestre que:

a) $I - \mathfrak{A}$ es idempotente.

b) $(I - \mathfrak{A})(I - t\mathfrak{A}) = I - \mathfrak{A}$, para todo t.

c) $(2\mathfrak{A} - I)^2 = I$.

d)$I + \mathfrak{A}$ es invertible. Hallar $(\mathfrak{A} + I)^{-1}$.

e) $\operatorname{Ker}\mathfrak{A} = \{x - \mathfrak{A}x | x \in V\} = \operatorname{Im}(I - \mathfrak{A})$.

f) $V = \operatorname{Im}\mathfrak{A} \oplus \operatorname{Ker}\mathfrak{A}$.

g) $\mathfrak{A}x = x$ para todo $x \in \operatorname{Im}\mathfrak{A}$.

h) Si $V = M \oplus L$ entonces existe una única transformación lineal $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}$, $\operatorname{Im}\mathfrak{B} = M$, $\operatorname{Ker}\mathfrak{B} = L$.

i) Cada autovalor de $\mathfrak{A}$ es 1 o 0.

j) La representación matricial de $\mathfrak{A}$ son respecto a cierta base es $A = \operatorname{diag}[1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$.

k) $\operatorname{rk}\mathfrak{A} + \operatorname{rk}(\mathfrak{A} - I) = n$.

l) $\operatorname{rk}\mathfrak{A} = \operatorname{tr}\mathfrak{A} = \dim \operatorname{Im}\mathfrak{A}$.

m) $|A + I| = 2^{\operatorname{rk}(\mathfrak{A})}$.

19.- Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ transformaciones lineales sobre un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ que satisfacen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Demuestre que:

a) Si λ es un autovalor de $\mathfrak{A}$, entonces el autoespacio asociado a λ es invariante por $\mathfrak{B}$.

b) $\operatorname{Im}\mathfrak{A}$ y $\operatorname{Ker}\mathfrak{A}$ son invariantes por $\mathfrak{B}$.

c) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen al menos un autovector común (no necesariamente de mismo autovalor).

d) Las representaciones matriciales de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son triangulares superiores en alguna base.

20.- Sea $C_\infty(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivadas de cualquier orden.

a) Considere el operador diferencial $\mathfrak{D}_1(y) = y'' + py' + qy$, $y \in C_\infty(\mathbb{R})$, donde p y q son constantes reales. Demuestre que $y = e^{\lambda x}$ está en $\operatorname{Kernel}(\mathfrak{D}_1)$ si, y sólo si, λ es una raíz de la ecuación cuadrática $t^2 + pt + q = 0$.

b) Considere ahora el operador diferencial $\mathfrak{D}_2(y) = y''$, $y \in C_\infty(\mathbb{R})$. Compruebe que $y = ce^{\lambda x}$ es un autovector de $\mathfrak{D}_2$, para todo c, y que cualquier número positivo es un autovalor de $\mathfrak{D}_2$.